REVISTA de PEDAGOGIE

JOURNAL of PEDAGOGY

http://revped.ise.ro

Print ISSN 0034-8678; Online ISSN: 2559 - 639X

TO WHAT EXTENT IS MATH HELPFUL? EXAMPLES OF APPLIED MATH: FROM FRACTIONS TO RESOURCE MANAGEMENT IN AN ORGANIZATION

ÎN CE MĂSURĂ NE AJUTĂ MATEMATICA? EXEMPLE DE APLICARE A MATEMATICII: DE LA FRACŢII LA ALOCAREA RESURSELOR ÎNTR-O ORGANIZAŢIE

Luminița CATANĂ

Journal of Pedagogy, 2015 (1), 57 - 68

https://doi.org/10.26755/RevPed/2015.1/57

The online version of this article can be found at: http://revped.ise.ro/category/2015-en/

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/ or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Published by:

INSTITUTUL DE ŞTIINŢE ALE EDUCAŢIEI

http://www.ise.ro/

Further information about *Revista de Pedagogie – Journal of Pedagogy* can be found at:
Editorial Policy: http://revped.ise.ro/editorial-policy/
Author Guidelines: http://revped.ise.ro/the-writer-guide-2/

ÎN CE MĂSURĂ NE AJUTĂ MATEMATICA? EXEMPLE DE APLICARE A MATEMATICII: DE LA FRACŢII, LA ALOCAREA RESURSELOR ÎNTR-O ORGANIZAŢIE

CS **Luminiţa Catană***

Rezumat

Alocarea resurselor este o problemă importantă pentru manageri şi pentru membrii unei echipe, iar rezolvarea sa corectă şi echitabilă este imposibilă fără matematică. De la fracţiile simple şi până la modele mai complexe ale matematicii este un drum lung. O constatare cu caracter general este aceea că, de obicei, resursele sunt limitate sau au un ritm de acumulare mai lent decât cerinţele sau nevoile pe care persoanele le au în mod curent, ceea ce duce la insatisfacţii şi la stări conflictuale în cadrul grupurilor. Articolul dezbate pe larg problema aceasta, recurgând la explicaţii matematice. Matematica ne arată că, dacă vom alege strategii de alocare a resurselor astfel încât fiecare persoană să fie cât mai mulţumită cu resursele pe care le primeşte sau dacă resursele sunt „corect" împărţite, stările de nemulţumire vor fi mai rare şi intensitatea lor redusă. Sunt prezentate câteva modele matematice, explicate într-un limbaj accesibil şi care ar putea fi preluate ca aplicaţii în orele de educaţie antreprenorială sau de matematică la liceu, oferind elevilor o bază de informaţii pentru dezbateri.

Cuvinte-cheie: alocarea resurselor, teoria jocului, jocuri matematice.

Abstract

Resource allocation is an important issue for managers and for the members of a team, and its fair solution is not possible without math. From simple fractions to the more complex mathematical models is nevertheless a long way. A general observation is that, usually, the resources are limited, or they have an accumulation rate slower than the people's demands or needs, which causes dissatisfaction and even conflicts among the group members. This article addresses this issue with the use of mathematical support. Mathematics tells us that if we choose resource allocations strategies which allow every person to be satisfied with the resources he/she receives, or if the resources are shared in a „right" way, the dissatisfaction will be less frequent and with a lower intensity. This article presents, in an accessible way, some mathematical models which could be used as practical applications in entrepreneurial education or math classes in high-school, that give students a base for further discussions and learning.

Keywords*: resource allocation, Game Theory, mathematical games.*

* Institutul de Ştiinţe ale Educaţiei, Bucureşti, România.
luminita.catana@ise.ro

1. De la înţelegerea fracţiilor...

Problema împărţirii echitabile, între mai multe persoane, a unor bunuri, fie acestea obiecte sau bani, apare din cele mai vechi timpuri, ea fiind reflectarea unor frământări constante din viaţa cotidiană. Fiind atât de importantă pentru fiecare dintre noi, apare nu numai în situaţiile de viaţă, ci şi în poveştile popoarelor. Amintim două dintre aceste poveşti, una din înţelepciunea arabă, alta din tradiţia românească.

Povestea arabă spune că trei băieţi, după ce tatăl lor moare, au de împărţit între ei 17 cămile. Modul de împărţire, conform testamentului, era următorul: cel mai mare trebuie să ia jumătate dintre cămile, cel mijlociu o treime, iar cel mic a noua parte. Povestea mai spune că aceştia nu se descurcă singuri, după calculul lor cămilele ar trebui tranşate şi, în final, nimeni nu ar fi mulţumit, cămilele în viaţă fiind mult mai valoroase. De aceea, cer ajutorul „înţeleptului" satului. Acesta adaugă turmei cămila sa şi totul devine deodată posibil! 18 cămile pot fi împărţite la jumătate, la trei şi la nouă. şi mai mult decât atât, la sfârşitul acestei „împărţeli", înţeleptul poate să îşi ia înapoi cămila. (Deşi, în fapt, calculul este incorect aritmetic încă din prima etapă, $\frac{17}{2} \neq \frac{18}{2}$! şi de aici toate calculele care urmează sunt eronate). Însă, priviţi cu atenţie câştigul: fiecare primeşte un număr de cămile în viaţă, iar ceea ce câştigă sau pierd este practic neglijabil. Satisfacţia nici nu poate fi mai mare!

Tot o astfel de „împărţire" întâlnim şi în povestea *Cinci pâini*, scrisă cu mult talent de Ion Creangă, şi care este, practic, o lecţie de calcul elementar, referitoare la fracţii. Pentru cei care nu cunosc povestea, o prezint pe scurt: doi prieteni, care călătoresc împreună, au în desagi mai multe pâini. Primul călător are două pâini, iar cel de-al doilea trei pâini. Întâlnesc un alt călător şi împart în mod egal, între ei, cele cinci pâini. Înainte de a se despărţi, invitatul la ospăţ le oferă cinci monede de aceeaşi valoare. Aceştia împart iniţial monedele astfel: cel cu 2 pâini ia două monede, iar cel cu 3 pâini, restul. De aici se iscă un mare scandal pe bani, aşa, ca între prieteni. După discuţii şi demonstraţii matematice, cel cu două pâini ia o monedă, iar celălalt restul. Însă, de această dată împărţirea monedelor este una corectă[1]. Iată deci că matematica ne conduce uneori către soluţii care par să contrazică bunul simţ. Dar tot astfel de exemple ne demonstrează şi importanţa acestui domeniu al ştiinţei în viaţa reală.

Vom arăta în cele ce urmează că, deşi scopul este de a aloca resurse într-o manieră corectă, uneori acest lucru este greu de realizat practic.

2. Despre situaţiile când „egal” înseamnă „mai puţin egal”

Ce se întâmplă dacă avem de împărţit în mod egal un obiect la mai multe persoane, de exemplu o sfoară de 1 m la trei persoane? Se poate realiza o împărţire exactă?
Teoria şi practica oferă diverse soluţii. Aritmetica din învăţământul obligatoriu ne oferă primul astfel de răspuns din teoria referitoare la numerele zecimale: putem împărţi exact orice număr la numere care sunt multipli de 2 şi 5, altminteri numerele obţinute pot fi de altă natură, pot fi numere zecimale periodice. Acest lucru înseamnă că de fapt împărţirea nu poate fi chiar exactă! De exemplu 1:3 are un număr infinit de zecimale.
Geometria de gimnaziu însă ne oferă o metodă practică, pornind de la teorema lui Thales. Iată cum stau lucrurile: dacă avem o sfoară de lungime 1 m (vezi Fig. 1) care trebuie tăiată în 3 părţi egale vom proceda astfel:

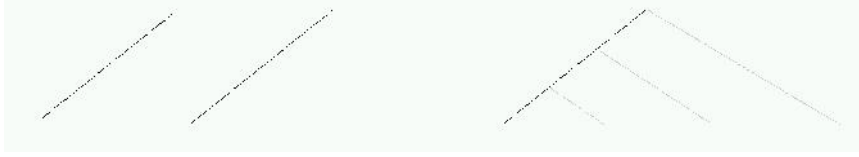


Fig. 1 ***Fig.2*** ***Fig.3***

Vom desena un segment de o lungime convenabilă, care poate fi teoretic împărţită în 3 părţi egale, de exemplu poate avea 1 metru şi 20 cm, astfel încât vom forma astfel o linie frântă formată dintr-un segment de lungime 1 m şi unul de lungime 1,20 m (ca în figura 2). Apoi vom uni capetele libere ale liniei frânte, formând un triunghi (ca în figura 3). Vom desena două „tăieturi” la 60 de cm distanţă una de cealaltă şi respectiv de capetele segmentului de 1,20 m (vezi figura 3), apoi ducem segmente paralele prin tăieturi. Vom obţine trei triunghiuri asemenea, iar pe latura de 1 m a triunghiului vom obţine 3 segmente aproximativ egale, cu dimensiunea de 33,33 cm, deci 1/3 m.

De ce este necesar să ne punem o astfel de problemă? De exemplu, imaginaţi-vă o bucată de pizza perfect circulară, care ar trebui împărţită la trei copii. Fireşte că la bucătărie nu vom utiliza instrumentele geometrice! Dar dacă pizza este simbol pentru alt bun? Cum vom proceda? Sesizăm că unghiul la centru este unul de 360°, număr care se împarte exact la 3. Trigonometria ne rezervă însă surprize referitoare la împărţirea exactă a unui unghi. Pornim de la presupunerea că dacă putem împărţi un unghi în 3 părţi egale putem împărţi

orice unghi în trei părţi egale! Imaginaţi-vă deci un unghi cu vârful în centrul unei pizza circulare, care are măsura de 360°.

Iată cum putem să construim astfel de unghiuri fără raportor: se desenează un cerc cunoscând raza şi centrul său. Se ia în deschiderea compasului raza cercului. Deoarece aceasta este egală, ca dimensiune, cu latura hexagonului înscris în cerc, se desenează punctele de pe cerc care pot fi vârfurile hexagonului înscris în cerc. Unind centrul cercului cu trei dintre aceste puncte, se obţin trei zone de dimenisuni egale.

3. Trigonometria uluitoare

Şi totuşi, de ce ne-ar furniza trigonometria şi un altfel de răspuns? Un matematician francez, Pierre Wantzel, a demonstrat că nu este posibilă o împărţire exactă pentru orice unghi în trei părţi egale (demonstraţia trigonometrică a fost realizată în 1837 şi se reduce la o problemă de algebră elementară). El arată că practic este imposibil să se construiască astfel de unghiuri matematic egale, prin împărţire, apelând la funcţiile trigonometrice şi la formulele din trigonometrie.

El şi-a demonstrat teoria utilizând formula arcului triplu:

$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$.

A considerat un unghi de 60° şi, ştiind că $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$, prin înlocuirea în prima formulă $\cos(\alpha) = t$, a obţinut:

$4t^3 - 3t - \frac{1}{2} = 0$. Dacă înmulţim cu 2 această ecuaţie, vom obţine:

$8t^3 - 6t - 1 = 0$, iar ecuaţia se poate scrie şi $(2t)^3 - 3(2t) - 1 = 0$.

Facem o nouă substituţie şi anume 2t = y şi avem ecuaţia echivalentă:

$y^3 - 3y - 1 = 0$

Însă această ecuaţie nu are soluţii în Q, cosinusul nu este număr raţional. Acest fapt ne duce la concluzia că unghiul nu poate fi împărţit în 3 părţi egale, deşi există unghiuri de 20° şi de 60°![2]

Contrar răspunsului lui Pierre Wantzel, există însă şi în acest caz un procedeu practic, aproximativ din punct de vedere matematic. Iată cum se poate proceda practic:

a) Se desenează unghiul respectiv, se decupează hârtia după laturile unghiului, formând un triunghi, se răsuceşte şi se ajustează astfel încât să se realizeze un con drept. Acest con are ca proiecţie pe planul hârtiei un cerc, dacă se efectuează corect paşii anteriori.
b) Cercul se împarte în trei părţi egale, aşa cum am procedat în exemplul anterior. Dacă ducem segmente de dreaptă de la vârful conului către cele 3 puncte desenate pe cercul nostru, vom obţine o împărţire a unghiului decupat (în 3 părţi egale).

Iată deci că nu întotdeauna modul de împărţire a unui întreg corespunde cu ceea ce ne sugerează bunul simţ şi se poate, de asemenea, ca un obiect să nu poată fi împărţit exact la numărul de persoane interesate. Totuşi, când este vorba de resurse, exactitatea este mai puţin importantă decât satisfacerea unor cerinţe minimale ale persoanelor implicate.

4. Alocarea de resurse în viaţa cotidiană

Orice proiect sau activitate presupune implicarea unor resurse de diferite tipuri – umane, materiale, financiare şi de timp. De obicei, împărţirea acestor resurse se face de către o persoană desemnată, cu acceptul membrilor echipei. Problema alocării de resurse, într-o perspectivă mai largă, priveşte atât asigurarea de resurse de la furnizori, cât şi împărţirea acestora membrilor echipei. Se poate spune că problemele de alocare a resurselor conţin următoarele elemente care urmează să fie clarificate:

- **resursele** care urmează să fie alocate pe proiect sau pe un obiectiv al proiectului şi **intervalul temporal** în care acestea sunt necesare;
- **sursele** de provenienţă ale resurselor sau furnizorii şi **volumul** sau cantitatea din resursa respectivă de care dispune fiecare furnizor, asociate cu intervalele de timp definite şi cu raportul preţ /calitate, care se presupune că nu e constant;
- **alocarea** cât mai echilibrată a resurselor disponibile, între membrii echipelor, în funcţie de activităţile pe care le vor desfăşura fiecare.

Sunt relativ puţine studii referitoare la modul în care resursele sunt alcocate la nivel de proiect sau la nivelul organizaţiilor. Există însă rezultatele unui studiu realizat de *Ernst & Young* pe un eşantion de 750 de directori financiari[3] de firme din mai multe ţări. Acest studiu, cu referire numai la un singur aspect specific domeniului (resursa financiară), subliniază că aproximativ două treimi dintre specialiştii chestionaţi consideră că alocarea de resuse nu este una echitabilă/echilibrată în domeniul financiar (deşi banii sunt mai uşor de împărţit decât obiectele sau resursele care au valori şi caracteristici diferite!). Şi, deşi

fenomenul este prezent şi în alte domenii, sunt extrem de rare studiile opinionale care să stabilească cu claritate existenţa şi dimensiunea fenomenului de alocare inechitabilă a resurselor în diferite tipuri de organizaţii.

Revenind la studiul respectiv, deoarece nu se pot face alocări de resurse echitabile, una dintre recomandările care s-au desprins a fost *necesitatea dezvoltării şi aplicării unor strategii de comunicare* pentru a preveni situaţiile de nemulţumire şi au fost formulate în acest sens un număr de 10 lecţii pentru managerii financiari, unele de strategie, care au în vedere mai buna cunoaştere a mediilor economice şi altele privind comunicarea cu partenerii, cu scopul unei ajustări a alocărilor resursei financiare (în raport cu câştigurile presupuse şi cu anumite riscuri). Totuşi, ipoteza cercetătorilor a fost că nemulţumirea persoanelor implicate în astfel de situaţii poate fi redusă semnificativ prin aplicarea unor modele matematice de alocare de resurse.

5. Modele matematice statice şi modele dinamice de alocare a resurselor

Modelele matematice de alocare a resurselor sunt de două tipuri: modele statice şi modele dinamice. La rândul lor, modelele statice au structuri matematice diferite, în funcţie de tipul sau tipurile de resurse pe care le prevăd. Prin simple generalizări sau particularizări, se poate trece de la un model la altul (există anumite echivalenţe).

Pentru a înţelege mai bine o astfel de structură trebuie să definim numărul şi caracteristicile resurselor vizate: dacă sunt mai multe resurse sau o singură resursă, dacă sunt omogene sau nu (adică dacă sunt de acelaşi fel sau diferite), dacă sunt perisabile sau nu, dacă pot fi înlocuite unele cu altele, cu caracteristici asemănătoare sau nu ş.a.m.d.

5.1. Modele statice

Modelele statice de alocare a unei resurse, distribuite la un număr de „n" persoane, urmăresc câteva ***principii*** care sunt, aşa cum se va vedea în cele ce urmează, reguli de bun simţ:

- *maximizarea satisfacţiei* persoanelor în raport cu cererile acestora – adică acestea vor primi cât mai mult posibil din ceea ce au solicitat (1);
- *simultaneitate*a – în acelaşi interval temporal, din resursă să fie alocate părţi (numite resurse parţiale) conform cu necesităţile persoanelor (2);
- însumate, aceste resurse parţiale nu trebuie să depăşească totalul resursei disponibile la un moment dat (3).

În general, pentru un scop propus, sunt proiectate mai multe variante de realizare ale proiectului care necesită resurse diferite. Pentru fiecare astfel de variantă există, probabil, posibilităţi diferite de alocare a resurselor, deoarece avem activităţi diferite, altfel dimensionate, iar numărul de persoane poate fi de asemenea diferit.

Notăm cu „v" o variantă aleasă dintr-o mulţime V de variante posibile. Pentru această variantă sunt mai multe persoane implicate notate cu 1, 2, 3, …, care doresc părţi distincte din resursele necesare derulării proiectului, notăm cu x_{ij}^{v} alocarea de resurse pentru varianta de planicare aleasă, notată cu v, pentru resursa i şi persoana j din echipă (menţionez că v, i, j sunt numere naturale, j este un număr între 1 şi n, deci un număr prin care este identificată o persoană dintr-o echipă de n persoane).

Dacă, de exemplu, avem pentru persoana a cincea din echipă, pentru resursa 1 – hârtie de copiator, alternativa nr. 2 – adică o activitate ce presupune multiplicarea de chestionare pentru 100 de profesori, chestionarul având 4 pagini, putem spune că x_{15}^{2} înseamnă de fapt 400 de pagini de hârtie, un minim de hârtie alocat pentru activitate (este posibil ca numărul acestea de pagini să fie insuficient dacă activitatea trebuie să fie reluată din cauza unor erori sau să fie necesare mai multe pagini de hârtie pentru un chestionar, pentru că încadrarea în pagină nu a fost realizată aşa cum se dorea iniţial).

Principiul al treilea de alocare de resurse se scrie sub forma unei inegalităţi. Pornim de la un caz particular. Presupunem că resursa totală de hârtie de copiator este de 5 topuri, fiecare de 500 de pagini, deci un total de 2500 de pagini. Asta înseamnă că această condiţie se va scrie $x_{11}^{2}+x_{12}^{2}+x_{13}^{2}+x_{14}^{2}+x_{15}^{2} \leq$ 2500 pag., ceea ce înseamnă că resursele personale, parţiale, x_{1j}^{2} nu trebuie să depăşească resursa totală disponibilă la un anumit moment, deci valoarea 2500.

Dacă generalizăm, obţinem formula: $\sum_j x_{ij}^{v} ? R_i$

unde i, j, v sunt numere naturale cu semnificaţia acordată anterior.

Există un raport al alocărilor utilizat în dimensionarea resurselor numit ***alocare minimă*** a unei resurse pentru un solicitant, care este de obicei notată cu şi care matematic se exprimă printr-un raport ce denotă cantitatea minimă acceptabilă dintr-o resursă pentru o variantă aleasă.

Dacă ne referim la situaţia anterioară, persoana nr. 5 are nevoie de cel puţin

400 pagini de hârtie sau de altă resursă care o poate înlocui pe aceasta, de exemplu banii necesari pentru a realiza la un centru de copiere xerox a celor 400 de pagini.

Introducând ideea de ***satisfacţie raportată la volumul resursei*** alocate unei persoane, aceasta se defineşte ca o funcţie continuă cu valori în intervalul [0, 1].

Funcţia este definită astfel: $g_{ij}(x_{ij}^{v})$: R? [0, 1],

$$g_{ij}(x_{ij}^{v}) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } v = 0; \\ \frac{x_{ij}^{v}}{c_{ij}}, \text{unde } c_{ij} > x_{1j}^{v},\ c_{ij} \text{ este cantitatea din cererea solicitantului;} \\ 1, \text{ pentru alte situații.} \end{cases}$$

Ideea este aceea că managerul de proiect trebuie să găsească un maxim pentru această funcţie de satisfacţie, pentru fiecare dintre persoanele implicate într-o echipă.

Altfel spus, satisfacţia solicitanţilor este maximă atunci când ei primesc cât cer sau mai mult. Funcţia are valori subunitare şi poate fi chiar nulă atunci când o persoană nu primeşte nimic din ceea ce solicită.

5.2. Modele dinamice

Modelele dinamice sunt cele care permit repartizarea resurselor pe obiective şi o variaţie a intensităţii consumului într-un interval de timp dat. Fără a insista prea mult asupra acestor modele, deoarece sunt foarte laborioase (de aceea managerii utilizează programe pe calculator pentru modelele dinamice), totuşi vom enumera paşii presupuşi de un astfel de model, care porneşte de la resursele disponivile pentru a identifica cea mai bună metodă:

- se defineşte şirul de funcţii care modelează satisfacerea solicitanţilor în raport cu împărţirea resurselor, pe obiective (acestea seamănă cu funcţia satisfacţie definită anterior, dar este o funcţie dependentă de timp);
- funcţiile sunt însumate; apoi, pe baza satisfacţiilor însumate, este identificată cea mai bună variantă de alocare a resurselor.

Aceste modele au ca ipoteză existenţa unor resurse omogene suficiente (adică resurse de acelaşi fel), însă, în cazul în care acestea nu sunt suficiente ca volum, în practică pot fi adăugate resurse care pot substitui resursele lipsă.

6. Răspunsuri oferite de noi teorii

6.1. Împărţirea echitabilă

Steven J. Brams analizează o procedură destul de cunoscută în teoria jocurilor numită „eu tai şi tu alegi". Această procedură este denumită şi împărţire echitabilă. Imaginaţi-vă de această dată că bunurile care urmează să fie împărţite sunt asemănate cu o felie de tort. Fireşte că aceasta este o metaforă a ceea ce se întâmplă în cele ce urmează, tortul putând fi orice alt bun care este sau nu omogen. Brams defineşte acest procedeu ca pe un joc între doi parteneri. Primul partener taie felia de tort în două părţi, iar cel de-al doilea alege primul bucata de tort pentru el. Primul partener ştie că, dacă nu procedează echitabil, va lua probabil bucata mai mică din prăjitură sau pe cea care nu i-ar conveni. De aceea, această „procedură" este executată astfel încât să fie satisfăcute două din trei proprietăţi pe care le vom defini astfel:

a. prima se referă la o alocare/ împărţire astfel executată încât nici o persoană să nu considere că cealaltă este avantajată;
b. respectarea principiului *de optim Pareto* sau de eficienţă, în sensul dat de statistică, adică nu există nici o altă alocare de resurse care să avantajeze o persoană în raport cu alta;
c. cea de-a treia cerinţă însă nu este satisfăcută în acest procedeu, cea de echitabilitate, adică este posibil ca valoarea acordată unei părţi primite de o persoană să fie diferită de valoarea evaluată de altă persoană.

Felia de tort trebuie privită ca o metaforă, tortul poate fi orice obiect sau bun care poate fi împărţit între două persoane. Presupunem că este de formă dreptunghiulară, dimensiunea sa este 1, de aceea matematic vorbind se „întinde între două limite", de la x=0 până la x=1. Definim funcţiile care determină valorile suprafeţelor din tort care ar urma să fie tăiate: $v_a(x) \geq 0$ şi $v_b(x) \geq 0$, cu valori pozitive, subunitare $(v_a(x) \in [0,1], v_b(x) \in [0,1])$. Se poate constata uşor că funcţiile sunt pozitive, aditive, crescătoare şi continue.

Fiind vorba de două persoane, putem considera valabilă următoarea formulă: $v_a(x) + v_b(x) = 1$, adică cele două părţi care, împreună, refac întreaga prăjitură. Pentru a simplifica situaţia din punct de vedere al matematicii, presupunem că tăieturile sunt totdeauna paralele cu laturile tortului.

Acum vă imaginaţi că tortul este făcut din ciocolată şi din vanilie, în părţi egale, însă acordarea valorilor acestor porţiuni este diferită. Partenerul **„a"** acordă o valoare dublă părţii cu ciocolată, comparativ cu partea din tort cu vanilie. Atunci valorile atribuite părţilor vor fi: $v_a(x) = 4/6$ pentru partea cu ciocolată şi $v_a(x) = 2/6$ pentru partea cu vanilie (altfel spus, partenerul **a** are o

preferinţă pentru tortul de ciocolată). Pentru a garanta primul principiu (adică nici o parte să nu fie avantajată), cum ar trebui să împartă tortul partenerul **a**?

Considerăm că tăietura care garantează primul principiu este la distanţa *d* de linia x=0; dimensiunea d s-ar calcula din ecuaţia de mai jos, astfel:

$$\frac{4}{6}(d-0)=\frac{4}{6}\left(\frac{1}{2}-d\right)+\frac{2}{6}\left(1-\frac{1}{2}\right).$$

Această ecuaţie are această formă pentru că între 0 şi ½ avem ciocolată şi între ½ şi 1 vanilie.

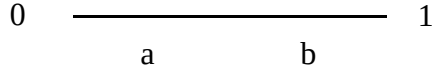
De aici se poate calcula $d=\frac{3}{8}$, deci tăietura ar trebui făcută la o distanţă de 3/8 de unde începe partea cu ciocolată. În final, o felie va avea numai ciocolată şi va avea dimensiunea 3/8, în timp ce cealaltă va avea 1/8 ciocolată şi restul 4/8 vanilie. Sunt din punct de vedere al compoziţiei şi al dimensiunii diferite, dar maniera de împărţire ia în calcul preferinţele fiecărui participant.

6.2. Excedentul sau procedura de adăugare a unui surplus

În teoria dezvoltată de Taylor şi Brams, împărţirea în două părţi egale se poate realiza prin satisfacerea relativă a principiului echităţii, numit de aceştia *echitabilitate proporţională*. Se presupune că se împarte nu la jumătate ca în exemplul precedent, ci se adaugă un surplus din prăjitură, numit *excedent*, pentru a mulţumi persoanele. Practic, o persoană poate primi mai mult de 50% dintr-o felie de tort, dacă felia este formată din părţi distincte care sunt considerate de valori diferite (de exemplu dacă vanilia este considerată de două ori mai puţin valoroasă de către un participant, poate lua o cantitate dublă). Ceea ce se poate deduce este că, într-o astfel de perspectivă, fiecare persoană trebuie să fie onestă cu privire la preferinţele sale, astfel încât împărţirea să fie echitabilă.

a. Calcul pentru echitabilitate proporţională

Să presupumen că avem o bucată de tort ca în situaţia anterioară, format din două bucăţi egale, cu valoare diferită, pe care o reprezentăm printr-un segment [0 ,1].



Iniţial, primul jucător ia porţiunea de la 0 la a, iar cel de-al doilea de la b la 1, conform preferinţelor exprimate. Porţiunea de la *a* la *b* constituie excedentul. Se poate ca în unele cazuri a şi b să coincidă şi atunci se taie după acest

punct. Dacă însă punctele nu coincid, presupunem existenţa punctului c între a şi b, iar tăietura să se facă prin c, un punct situat între a şi b, după preferinţele celor doi parteneri. Acest punct c este determinat printr-o proporţie de suprafeţe care matematic sunt exprimate printr-un calcul de suprafeţe:

$$\frac{\int_a^c f_A\ (x)dx}{\int_a^b f_A\ (x)dx} = \frac{\int_c^b f_B\ (x)dx}{\int_a^b f_B\ (x)dx} = p$$

Acest punct c se calculează şi determină linia de tăietură pentru echitabilitatea proporţională. De exemplu, aplicând formula de mai sus în cazul în care tăieturile (care exprimă preferinţele) sunt $a = \frac{3}{8}$ şi $b = \frac{1}{2}$, şi calculând c prin înlocuire ($f_{A\ (x)}$ este $\frac{4}{3}$ şi $f_{B\ (x)}$ este 1) se obţine

$c = \frac{7}{16}$, iar $p = \frac{1}{2}$.

b. Calcul pentru excedent împărţit echitabil

Acest tip de calcul se realizează dacă dorim ca fiecare să aibă părţi de aceeaşi valoare din excedent. Ariile suprafeţelor ar trebui să fie egale, dacă le considerăm de aceeaşi valoare.

Iată cum se procedează:
Se consideră punctul e la care alocarea de resurse e echitabilă.

$$\int_{\frac{3}{8}}^{e} \frac{4}{3}dx = \int_{e}^{\frac{1}{2}} dx,$$

$$\frac{4}{3}(e - \frac{3}{8}) = \frac{1}{2} - e$$

Iar din calculul integralelor definite rezultă, pentru acest caz particular, $e = \frac{3}{7}$.

Câteva concluzii relevante

Alocarea de resurse este un domeniu interesant pentru matematicieni, economişti şi manageri, existând în acest moment întrebări care încă nu sunt clarificate; unele întrebări formulate conduc la paradoxuri matematice, aşa cum sunt şi cele prezentate în acest articol. Există însă şi propuneri recente de modele teoretice care clarifică anumite aspecte. Capitolul însă rămâne deschis, mai ales că modelele nu au legătură unele cu altele, în acest moment fiind dificil să construim reprezentări închegate ale unui atare subiect.

Unele exemple demonstrează că matematica oferă alte soluţii decât cele care ar părea de bun-simţ.

Alocările sunt uneori inexacte matematic, dar produc mulţumirea membrilor echipei.

Unele alegeri ţin numai de preferinţa unui participant sau a unor participanţi. Dacă se ţine cont de toate preferinţele persoanelor, situaţia din punct de vedere matematic se complică, iar răspunsurile oferite de matematicieni, până în acest moment, depind de ipotezele luate în calcul (nici un model nu oferă complexitatea unei situaţii reale).

NOTE

[1] Dacă împărţim în 3 părţi egale fiecare pâine, obţinem un număr de 15 bucăţi egale; primul pune 6 bucăţi, provenind de la cele două pâini ale sale, şi mănâncă 5 părţi, iar cel de-al doilea are 9 bucaţi şi mănâncă tot 5. Deci primul călător a oferit de fapt o singură bucată din pâini, în timp ce al doilea dă restul de 4 bucăţi de pâine (cel de-al treilea mănâncă tot 5 bucăţi). Dacă cel de-al treilea oferă 5 monede, atunci este normal ca şi cei doi să fie răsplătiţi proporţional, conform numărului de bucăţi de pâine oferite.

[2] Semnificaţia este aceea că un unghi de 60 de grade nu poate fi împărţit în 3 părţi identic egale, pentru că cos α ne va da un număr iraţional.

[3] Rezultatele acestui studiu se referă la necesitatea unei alocări echilibrate de resurse între pieţele dezvoltate şi cele în creştere rapidă, la riscurile implicate şi la oportunităţi.

REFERINŢE BIBLIOGRAFICE

Barbanel, J. B. *The Geometry of Efficient Fair Division*. Cambridge University Press: New York, NY, 2005.

Barbanel J. B. & Brams S. J. Cake division with minimal cuts: Envy-free procedures for 3 persons, 4 persons, and beyond. In: *Mathematical Social Sciences,* no. 48 -4, November, 2004, pp. 251-269.

Brams, S. J.& Klamler, C. Better ways to cut a cake. *Notices of the American Mathematical Society,* Vol. 53, no. 11, 2006, pp. 1314-1321.

Brams, S.J. *Divide-and-Conquer: A Proportional, Minimal-Envy Cake-Cutting Procedure*, 2007. Disponibil la: http://drops.dagstuhl.de/volltexte/2007/1221/pdf/07261. BramsSteven.Paper.1221.pdf, accesat la 14 iunie 2015.

Lucas, W. F. (1979). Application of cooperative games to echitable alocations. In *Game Theory and Its Application*s, William F. Lucas (ed.), American Mathematical Society (Vol 24, Proceedings of Simposia in Applied Mathematics, pp. 19-29).

REVISTA *de* PEDAGOGIE

INSTITUTUL DE STIINTE ALE EDUCATIEI

ANUL LXIII • NR. 1 • 2015